EXERCICE N°1 — 6 points — 35 ' — CONTRÔLE 2016

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) : $z^2-\left(1+i\left(2+\sqrt{3}\right)\right)z-2\left(\sqrt{3}-i\right)=0$

1°) a) Vérifier que $2i$ est une solution de (E) .

b) Déterminer l'autre solution de (E) .

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .On note A, B et I les points du plan d'affixes respectives $z_A=1+i\sqrt{3}$, $z_B=2i$ et $z_I=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$.

a) Mettre les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

b) Vérifier que A et B sont deux points du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2.

c) Vérifier que I est le milieu du segment $[AB]$.

d) Construire le cercle $\mathscr{C}$ ainsi que les points A, B et I .

3°) a) Justifier que la demi-droite $[OI)$ est la bissectrice de l'angle $A\hat{O}B$.

b) Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ $,k\in\mathbb{Z}$

c) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OI}}\right)=\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi$ $,k\in\mathbb{Z}$

d) En déduire que $z_I=\sqrt{2+\sqrt{3}}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

4°) Donner alors les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

EXERCICE N°2 — 5 points — 35 ' — PRINCIPALE 2017

Le plan complexe est rapporté au repère au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1°) a) Vérifier que : $-7-4i\sqrt{2}=\left(1-2i\sqrt{2}\right)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2+z+2+i\sqrt{2}=0$.

2°) On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A=-i\sqrt{2}$, $z_B=-1+i\sqrt{2}$ et $z_C=\overline{z_A}$.

Montrer que C est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

3°) A tout M du plan d'affixe z distinct de chacun des points A et B, on associe le point M'd'affixe z'tel que : $z' = \dfrac{z+1-i\sqrt{2}}{z+i\sqrt{2}}$

a) Montrer que si l'affixe z'du point M'est imaginaire pur, alors M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

b) Montrer que si $|z'|=1$, alors M est un point de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

4°) Soit E le point d'affixe $z_E = \left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}i$ et E'le point d'affixe $z_{E'} = \dfrac{z_E+1-i\sqrt{2}}{z_E+i\sqrt{2}}$.

a) Montrer que $z_{E'} = -i$.

b) Déduire l'affixe de chacun des deux points d'intersection de la droite Δet du cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE N°3 — 4 points — 25' — CONTRÔLE 2017

1°) a) Calculer $(3+i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(1-3i)z-4-3i=0$.

2°) Soit $P(z) = z^3-(4+3i)z^2-(9-12i)z+20+15i$

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A,B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = -2+i$, $z_C = -z_B$ et $z_D = 5$.

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

4°) a) Mettre sous forme cartésienne $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$.

b) Déduire que le triangle ACD est isocèle rectangle.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

c) Calculer la distance AC et déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com